

Mergulho de variedade clássicas – uma introdução e aplicações

Nilo Koscheck

RESUMO

A ideia do trabalho é apresentar uma breve introdução de estudos de mergulhos do círculo S^1 no toro $T^2 - S^1 \times S^1$, explicando o conceito de mergulho em variedades (superfícies generalizadas) de curvas simples, exibindo sua riqueza e importância em matemática e em física com apresentação formal de algumas aplicações. O objetivo principal é apresentar essa brilhante e rica página da matemática com muitas ilustrações para motivar o leitor e pesquisador interessado em pesquisas matemáticas a aprofundar-se nesse excitante e fervilhante campo!

1. INTRODUÇÃO: O QUE É CURVA?

Quando pegamos a ponta de um lápis e desenhamos uma linha qualquer sobre a superfície de um ovo, estaremos representando exatamente os conceitos aqui abordados nessa leitura. A *linha* traçada sobre o *ovo* é uma curva que *está imersa*, numa superfície bidimensional fechada, chamada *ovóide (ovo)*. Que em matemática costumamos chamar de uma variedade diferenciável.

A observação das propriedades que entes matemáticos conhecidos como curvas, superfícies e variedades e, suas inusitadas relações, permitem construir todo um ramo da Matemática que chamamos de topologia, nome dado pelo matemático S. Lefschetz. Onde se apresenta atualmente, em pleno desenvolvimento e com variadas aplicações.

2. UM BREVE HISTÓRICO

(extraído de Sampaio, J.C.V. – Tópicos de Topologia Intuitiva, X Encontro Brasileiro de Topologia, 1996)

A Topologia começou a ser reconhecida como área distinta da Matemática no início do século 20 e seu grande desenvolvimento começou na década de 1930. Tem sido uma área de muito desenvolvimento e tem influenciado muitas outras áreas da matemática. Ela começa em resposta a certas necessidades dentro da Análise. É uma espécie de "geometria rústica". As idéias da Topologia tem penetrado quase todas as áreas da matemática e na maioria dessas aplicações ela fornece ferramentas e conceitos para provar certas proposições básicas conhecidas altas. O primeiro aspecto, normalmente chamado Topologia Geral (point set topology), foi fundamentada por F. Hausdorff e outros no período 1900-1910. A compatibilização dos dois aspectos, geral e combinatória, foi estabelecida primeiro por L. E. J. Brouwer, quando o mesmo desenvolveu o conceito de dimensão e depois, definitivamente, por J. W. Alexander, P. L. Alexandrov e S. Lefschetz no período 1915-1930. Até este período, Topologia era conhecida por "Analisis Situs". Foi S. Lefschetz quem primeiro popularizou o nome Topologia. algébrico, foi iniciado nos anos 1890 por H. Poincaré estudando calculo integral em dimensões

3. ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS

(a) *Curvas regulares*

Uma *curva regular* é um conjunto unidimensional C que é suave (que não tem quinas) em todos os seus pontos. , isto é, uma curva é uma aplicação contínua cujo domínio é um *intervalo*. Mais precisamente, seja I um intervalo de números reais. Então em que X é um espaço topológico (um conjunto de ponto no espaço) uma curva γ é uma função contínua $\gamma : I \rightarrow X$. Por vezes também se chama curva à imagem dessa aplicação.

É conveniente ampliarmos o conceito de curva. Uma *curva suave* por partes é uma união finita de curvas orientadas em que a extremidade do primeiro ponto coincide com a origem do segundo, e assim sucessivamente.

Em topologia, uma curva é uma aplicação contínua cujo domínio é um intervalo. Mais precisamente, seja um intervalo de números reais (isto é, um conexo subconjunto não vazio de \mathbb{R}). Então uma curva é uma função contínua , em que é um espaço topológico. Por vezes também se chama curva à imagem dessa aplicação.

(b) A curva γ é dita ser simples, ou uma *curva de Jordan*, se ela é injetiva, ou seja, se para todo x, y , em I , tem-se $\gamma(x) = \gamma(y) \Rightarrow x = y$. Se I é um intervalo fechado $[a, b]$, também é permitida a possibilidade de que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Tal convenção torna possível falar sobre curvas simples "fechadas".

(c) *Superfícies Regulares*

Uma superfície (regular) S é um conjunto bidimensional que é suave em todos os seus pontos. Em particular, dados três pontos $p_1, p_2, p_3 \in S$, o plano determinado por estes pontos tem uma posição limite quando p_1, p_2 e p_3 tendem para um ponto $p \in S$, de um modo qualquer.

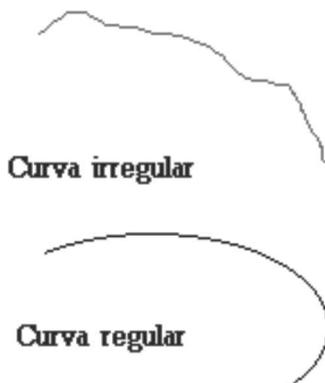


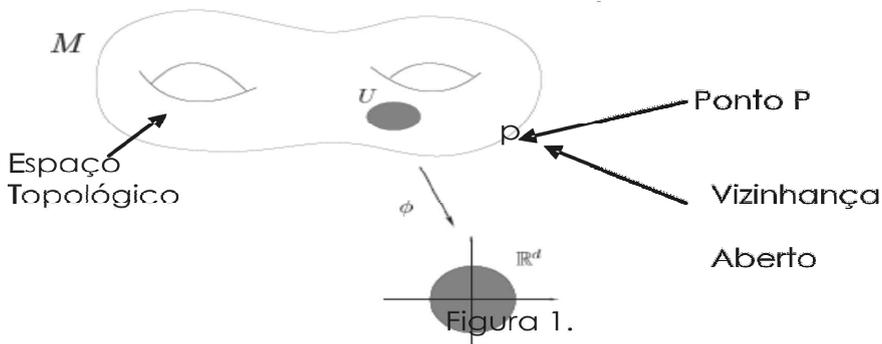
Figura 1

(d) *Variedades Diferenciável*

A noção de *variedade diferenciável* formaliza o conceito de um espaço E , que localmente é como um espaço euclidiano, quer do ponto de vista topológico, quer do ponto de vista da sua estrutura diferenciável. Esta noção é uma abstração das noções usuais de curva e superfície em \mathbb{R}^n . A Geometria Diferencial ocupa-se do estudo das *variedades diferenciáveis*. Veremos que, por um lado, muitas das construções da análise infinitesimal (i.e., do Cálculo) podem ser estendidas do espaço euclidiano a qualquer variedade. Por outro lado, a análise global em variedades requer técnicas e métodos novos, e mesmo as questões mais elementares resultam muitas vezes em problemas em aberto.

Recordemos que \mathbb{R}^d designa o espaço euclidiano de dimensão d . Vamos adotar a convenção de designar também por $x_i \in \mathbb{R}^d$ a função coordenada i . Um espaço localmente euclidiano de dimensão d de um espaço topológico M em que cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^d .

$$\mathbb{R}^d = \{(x^1, \dots, x^d) : x^1, \dots, x^d \in \mathbb{R}\}$$



4. EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES FECHADAS EM \mathbb{R}^3 (ou S^3) O U SIMPLEMENTE DE VARIEDADES

Normalmente, as superfícies mais simples conhecidas, são superfícies orientáveis e mergulhadas em \mathbb{R}^3 .

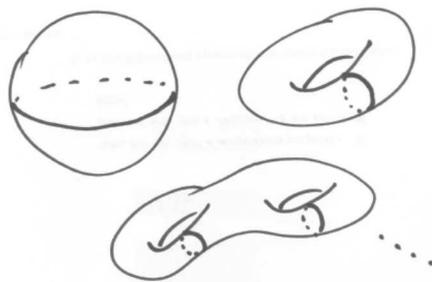


Figura 2 - Observe que o "lado de dentro" das superfícies são "alças".

4.1 Elementos básicos das variedades

· Característica de Euler χ

Define-se a Característica de Euler de uma superfície compacta S por $\chi(S) = \text{número de vértices} - \text{número de arestas} + \text{número de faces}$ ($M = V - A + F$), obtidos de qualquer triangulação de S . Prova-se que este número $\chi(S)$ não depende da triangulação (só depende da classe e homeomorfismo da superfície), isto é $\chi(S)$ é um invariante topológico e é usado para distinguir as superfícies acima descritas.

$$\chi(S) = V - A + F$$

· **Curvatura K:**

Intuitivamente, definimos que como *curvatura de Gauss* de um ponto sobre uma superfície é o produto das curvaturas principais, κ_1 e κ_2 , do ponto dado. É uma medida *intrínseca* de curvatura, i.e., seu valor depende somente de como as distâncias são medidas sobre a superfície, não da maneira como estão imersas no espaço.

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

· **Genus (alças)**

O número de *alças* é chamado de “*genus*” da superfície. A esfera S^2 tem genus zero e o toro tem genus 1.

Observe que uma esfera com alças, colocada como descrito nos desenhos, tem lado de dentro e lado de fora. Superfícies com esta propriedade são ditas orientáveis. As esferas com alças são bastante gerais, no seguinte sentido: dada uma superfície fechada e orientável qualquer S^2 ; ela é homeomorfa (deformável) numa esfera com alças. Portanto, uma superfície fechada e orientável M^2 fica caracterizada pelo seu genus $g(S^2)$ e há uma relação muito simples entre o genus e a característica de Euler numa superfície, que é:

$$\chi(S^2) = 2 - 2g(S^2).$$

Vemos daí que $\chi(S^2)$ é sempre par para superfícies fechadas e orientáveis e também que podemos obter $g(S^2)$ em função de $\chi(S^2)$:

$$2g(S^2) = 2 - \chi(S^2):$$

Percebemos ainda, que o número par $\chi(S^2)$ determina o tipo de superfície: pelo que vimos acima. Variando-se a superfície S^2 , o genus $g(S^2)$, pode assumir qualquer valor par menor ou igual a 2. Isto é $\chi \leq 2$.

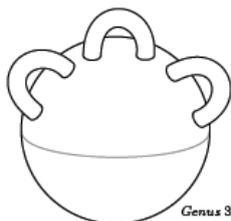


Figura 3 - Fonte: Antonio Conde (USP).

· **Fins (Pontos ausentes na superfície)**

De modo um pouco informal, podemos definir com fins em uma superfície ao número de pontos que retiramos dessa superfície, tal definição só faz sentido quando utilizamos equivalentes topológicos. Por exemplo, dizemos que um plano é topologicamente equivalente a uma superfície esférica menos um ponto. (o ponto do pólo norte), fazendo uso da imaginação.

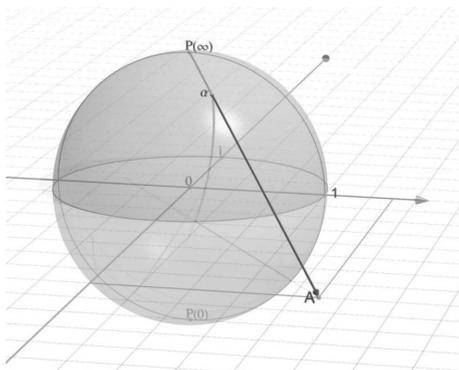


Figura 4

Teorema de Gauss-Bonnet (teorema da estrutura conforme): Dada uma superfície fechada $S \in E^3$, a integral da curvatura gaussiana em S depende apenas do tipo topológico de S , isto é, o valor do seu genus e , é dada por:

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

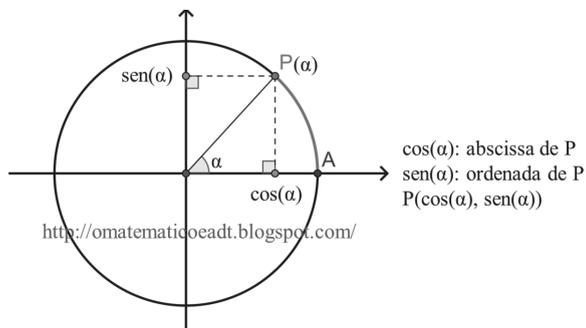
5. MERGULHOS ($S^1 \rightarrow T^2$)

Abordaremos agora a questão dos mergulhos. Neste item a classificação de certos mergulhos do círculo S^1 (nós), ou reunião disjunta de vários círculos (enlaçamentos) em R^3 ou S^3 . Não é preciso discutir sobre a existência destes mergulhos, pois existe pelo menos o mergulho padrão, dado por:

$$S^1 = \{f(\cos(u); \sin(u); 0) \in R^3; \text{ com } \theta \in [0; 2\pi)\},$$

ou se pretendemos ver o mergulho como uma função definimos $f: S^1 \rightarrow T^2$ por $f(u) = (\cos(u); \sin(u); 0)$. Neste caso estamos olhando S^1 com o intervalo $[0; 2\pi]$ onde identificamos os seus extremos, outras vezes olha-

remos S^1 como o círculo unitário nos complexos, isto é um ponto será da forma $e^{i\theta}$. Estaremos também olhando S^3 como a compactificação de \mathbb{R}^3 e é fácil ver que existe uma bijeção natural entre os mergulhos (“mansos” – sem muitos nós) do círculo em S^3 e em \mathbb{R}^3 ,



5.1 Exemplos de Mergulho ($S^1 \times T^2$)

Vamos apresentar de forma muito resumida o estudo dos mergulhos do círculo S^1 no toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Neste caso temos resultados completos e não triviais e a referência é Rolfsen (1976).

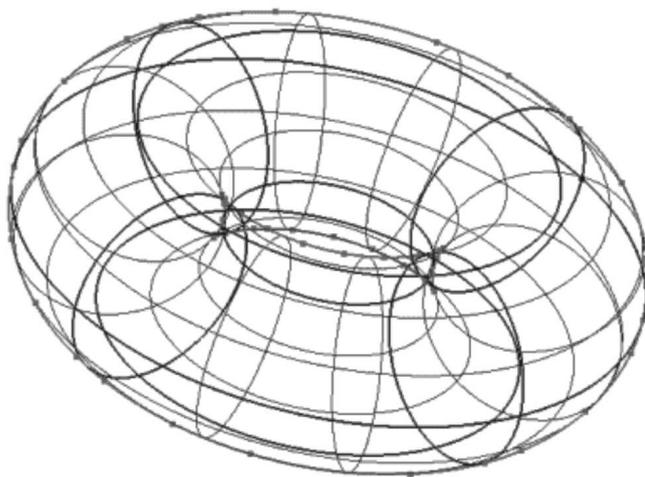


Figura 5 - Fonte: <http://www.forexfactory.com/showthread.php>

6. ALGUMAS APLICAÇÕES

A1. Em Física- Bobinas & Toros (campos magnéticos)

Em 1820, *Hans Oersted* descobriu que uma agulha de bússola, que é magnética, é desviada quando colocada perto de uma corrente elétrica.

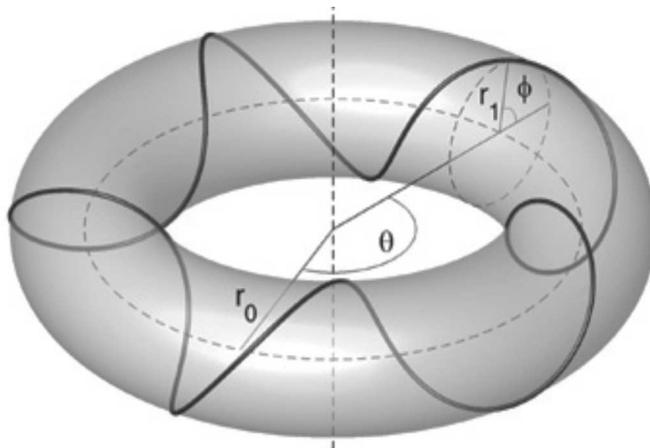
Cargas elétricas produzem campo elétrico → cargas elétricas em movimento (corrente) produzem campo magnético.

O campo magnético $d\vec{B}$ no ponto P , produzido por uma corrente I através do comprimento ds do fio é

Equação I campo magnético total será: Equação II

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{e}_r}{r^2}$	$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{e}_r}{r^2}$
---	---

Em volta de um fio (curva) transportando uma corrente, as linhas do campo magnético formam círculos em torno do fio. Se imaginarmos que esse fio esteja irmesa na superfície de um toro a composição e forma do campo magnético gerado pelo fio condutor de energia elétrica, apresenta calculos bastante elaborados na sua determinação. A figura 6 abaixo, apresenta o fio enrolado na sobre o toro. (Figura 6)



A curva acima parametrizada nas coordenadas locais do toro ,pode ser gerada a partir da solução da integral da equação II acima, que consideramos parâmetros convenientes para sua determinação. Uma solução apresentada por Ricca em 1995 , Ricca - 1995) é exibida a seguir:

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 + \epsilon k_r \sin \left[\left(\frac{q}{p} \right) \frac{\eta}{r_0} + \beta_k \right] , \\ \alpha &= \frac{s}{r_0} + \epsilon \left(\frac{q}{p} \right) \frac{k_r}{r_0} \cos \left[\left(\frac{q}{p} \right) \frac{\eta}{r_0} + \beta_k \right] , \\ z &= \frac{\hat{t}}{r_0} + \epsilon k_r \left[1 - \left(\frac{p}{q} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos \left[\left(\frac{q}{p} \right) \frac{\eta}{r_0} + \beta_k \right] , \end{aligned} \right\}$$

A curva imersa no toro, isto é o toro $T_{1,10}$ apresenta uma belíssima figura, cuja utilidade em física e engenharia é incomensurável.

A2. Superfícies mínimas- Mergulhos $[(S^1 T_{x,y}) \times T^2]$

Uma superfície que tem superfície média zero em todos os seus pontos é chamada uma *superfície mínima*

Exemplo: Superfície de Costa



Figura 7 - http://es.encydia.com/fr/Superficie_de_Costa

O mergulho da curva S^1 (nó $T_{x,y}$) nessa superfície mínima parece representar um grande desafio matemático e é uma problema ainda não resolvido.

A3. Superfícies complicadas - Determinação de áreas (Biologia)

Vista em perspectiva de dois pontos, de uma superfície complicada. O tamanho desta superfície pode ser estimado pelo número de interseções com a reta. Ver em Fischmeister (1967)



CONCLUSÕES

Como afirmamos no início desse ensaio, o objetivo era fazer um percurso atento por uma das páginas mais ricas sobre a evolução dos conceitos relacionados à Topologia, entendida aqui como um ramo da matemática. As muitas ilustrações apresentadas, servem para motivar o leitor e pesquisador, interessado em pesquisar mais profundamente os conceitos expostos. Além de alguns exemplos nas áreas de física pontuados durante esse excitante e fervilhante campo.

REFERENCIAS

D. ROLFSEN, *KNOTS AND LINKS*, Publishor Perish Inc.1976.

RENZO L. RICCA, *Geometric and Topological Aspects of Vortex Filament Dynamics under LIA*, UCL, London ,1995.

TAIT, P.G., *On Knots*, In: *Scientific paper I*, pp. 273-274, London: Cambridge University Press.1898

TEIT TEICHNER, P. , *Knots, von Neumann Signatures, and Grope Cobordisms* ,2002

PERKO, K.A., *On the classification of knots*, Notices Amer. Math. Soc.,20, pp. 453-454, 1973

L. P. Neuwirth. *The algebraic determination of the genus of knots*, Amer. J. Math 82, pg. 791-798, 1960.

CARMO, Manfredo, *Superfícies Mínimas*, Publicações Matemáticas, Impa,R.J.,2004.

FISCHMEISTER, H. F. *Apparative Hilfsmittel der Sterologie. In Quantitative methods in morphology*. Weibel, E. R. U (eds.) pages. 211-249. Berlin-Heidelberg-N.Y. Springer, 1967.